

## Ein hinreichendes Kriterium für geometrische Konvergenz rationaler Tschebyscheff-Approximationen auf $[0, \infty]$

HANS-PETER BLATT

*Fakultät für Mathematik und Informatik der Universität Mannheim (WH), A 5  
6800 Mannheim, BRD*

*Communicated by Richard S. Varga*

Received January 1, 1977

Das Konvergenzverhalten rationaler Approximationen an ganze Funktionen über unbeschränkten Bereichen wurde in jüngster Zeit Gegenstand zahlreicher Untersuchungen. Wir beweisen in dieser Arbeit ein hinreichendes Kriterium für die geometrische Konvergenz der Minimalabweichungen, das alle bisher bekannten direkten Kriterien als Spezialfälle enthält. Insbesondere ergibt sich die geometrische Konvergenz für ganze Funktionen  $f$  mit  $f'(x) \geq 0$  für alle  $x > r_0$ , die außerdem eine für die geometrische Konvergenz notwendige Wachstumsbedingung erfüllen.

### 1. GEOMETRISCHE KONVERGENZ RATIONALER APPROXIMATIONEN

Ausgangspunkt der Untersuchungen über das asymptotische Verhalten der Minimalabweichungen waren Beziehungen zwischen der Holomorphie und der geometrischen Konvergenz der Minimalabweichungen [6, 8, 9]: Um eine Theorie vom Bernstein-Typ zu entwickeln, betrachtet man zu gegebenem  $r > 0$  und  $s > 1$  die abgeschlossene Ellipse  $\mathbb{E}(r, s)$  der komplexen Ebene mit Brennpunkten in 0 und  $r$  und der Summe  $r \cdot s$  beider Achsen.

Für eine ganze Funktion  $f$  setzen wir

$$M_f(r, s) := \max_{z \in \mathbb{E}(r, s)} |f(z)|.$$

Ist  $f: [0, \infty] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , so definieren wir

$$\|f\| := \sup_{x \in [0, \infty]} |f(x)|$$

und

$$\|f\|_r := \sup_{0 \leq x \leq r} |f(x)| \quad \text{für } r > 0.$$

Meinardus *et al.* [10] bewiesen das folgende notwendige Kriterium.

SATZ 1. Sei  $f(x)$  eine reelle, stetige Funktion über  $[0, \infty)$ ,  $\{p_n\}$  eine Folge reeller Polynome mit  $p_n \in \Pi_n$  für jedes  $n \geq 0$  und  $q$  eine reelle Zahl mit

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{f} - \frac{1}{p_n} \right\|^{1/n} = \frac{1}{q} < 1. \quad (1.1)$$

Dann gibt es eine ganze Funktion  $F(z)$  mit  $F(x) = f(x)$  für alle  $x \geq 0$  und  $F$  ist von endlicher Ordnung. Außerdem gibt es für jedes  $s > 1$  Konstanten  $K > 0$ ,  $\theta > 0$  und  $r_0 > 0$  mit

$$M_f(r, s) \leq K(\|f\|_r)^\theta \quad \text{für alle } r \geq r_0. \quad (1.2)$$

Umgekehrt bewiesen die gleichen Verfasser in [10].

SATZ 2. Sei  $f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_v z^v$  eine ganze Funktion mit  $a_v \geq 0$  für  $v \geq 0$  und  $a_0 > 0$ . Wenn  $f$  die Wachstumsbedingung (1.2) erfüllt, dann gibt es eine Folge von reellen Polynomen  $\{p_n\}$  und ein  $q > 1$ , so daß (1.1) erfüllt ist, d.h. geometrische Konvergenz vorliegt.

Beide Sätze initiierten eine Reihe von Anstrengungen, um die Diskrepanz zwischen hinreichenden und notwendigen Bedingungen abzubauen. In [2] wurde die über die notwendigen Bedingungen hinausgehende Nichtnegativität der Taylorkoeffizienten soweit abgemildert, daß nur noch fast alle  $a_v$  nichtnegativ sein mußten. Roulier und Taylor [11], bzw. Blatt [3] zeigten, wann die geometrische Konvergenz einer Funktion bei kleinen Störungen erhalten bleibt. Henry und Roulier [7] bewiesen für eine gewisse Klasse monotoner Funktionen geometrische Konvergenz und entdeckten die Unvollständigkeit der notwendigen Bedingungen von Satz 1. Als zusätzliche Erweiterung ergab sich, daß die Funktion  $f$  nicht zu stark oszillieren durfte.

Wir stellen hier ein hinreichendes Kriterium vor, woraus sich insbesondere die geometrische Konvergenz für ganze Funktionen  $f$  ergibt, die für alle genügend großen reellen Werte monoton wachsen und die notwendige Wachstumsbedingung (1.2) erfüllen. Die Beweismethode benutzt einmal die Charakterisierung der Minimallösungen, die im nächsten Abschnitt dargestellt wird, zum anderen eine Vergleichstechnik, wie sie ansatzweise bereits in [2, 5] zu erkennen ist. Diese Technik versucht, die Approximation auf  $[0, \infty]$  durch Approximation auf endlichen Intervallen abzuschätzen, eine Idee, die bereits vor einigen Jahren von Meinardus vorgeschlagen wurde.

## 2. RATIONALE TSCHEBYSCHEFF-APPROXIMATIONEN AUF $[0, \infty]$

Im Intervall  $[0, \infty)$  sind  $L$  reelle Punkte  $x_1 < x_2 < \dots < x_L$  ( $L \geq 1$ ) vorgegeben, denen nichtnegative ganze Zahlen  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L$  zugeordnet sind.

Wir setzen

$$\beta := \sum_{i=1}^L \beta_i,$$

$$w(x) := \prod_{i=1}^L (x - x_i)^{\beta_i}$$

und betrachten eine Funktion  $f$  mit den Eigenschaften:

$$f \text{ ist in jedem Punkt } x_i (1 \leq i \leq L) \text{ } 3\beta_i\text{-mal differenzierbar,} \quad (2.1)$$

$$f = w \cdot \hat{f}, \text{ wobei } \hat{f} \text{ über } [0, \infty) \text{ stetig, reellwertig und } > 0 \text{ ist,} \quad (2.2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)} = c \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Wir wollen jetzt für  $n \geq 3\beta$  die Funktion  $1/f$  bezüglich

$$V_n := \left\{ \frac{1}{q} \mid q \in \Pi_n \right\}$$

approximieren, d.h. wir minimieren die Tschebyscheff-Norm

$$\left\| \frac{1}{f} - \frac{1}{q} \right\| := \sup_{x \in [0, \infty)} \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{q(x)} \right|$$

bezüglich  $q \in \Pi_n$ . Dabei ist  $\Pi_n$  die Menge der Polynome vom Grad  $\leq n$ .

Wir nennen  $\rho_n(f)$  die Minimalabweichung zu  $1/f$  bezüglich  $V_n$ . Dazu bestimmen wir  $p \in \Pi_{2\beta-1}$  so, daß

$$p^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i) \quad (2.4)$$

für  $i = 1, 2, \dots, L$  und  $j = 0, 1, \dots, 2\beta_i - 1$  gilt und definieren

$$\tilde{V}_n := \left\{ v = \frac{1}{q} = \frac{1}{p + w^2 p_1} \mid p_1 \in \Pi_{n-2\beta}, q(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in [0, \infty) \text{ mit } x \neq x_i \right\}. \quad (2.5)$$

Man beweist ohne Schwierigkeiten den

**SATZ 3.** Für  $n \geq 3\beta$  ist  $\tilde{V}_n \neq \emptyset$ , und die Minimallösung zu  $1/f$  bezüglich  $V_n$  existiert und liegt in  $\tilde{V}_n$ .

Ähnlich wie bei der rationalen Approximation einer Funktion über  $[0, \infty]$ , die keine Singularitäten besitzt, läßt sich die Minimallösung durch eine Alternante charakterisieren.

SATZ 4. Es sei  $\tilde{V}_n \neq \emptyset$  und  $\rho_n(f) > c, n \geq 1$ . Dann ist  $v_0 = 1/q_0$  Minimallösung zu  $1/f$  bezüglich  $V_n$ .

$\Leftrightarrow$  (1) Falls  $q_0 \in \Pi_n - \Pi_{n-1}$ , dann existiert in  $[0, \infty)$  eine Alternante der Länge  $n - 2\beta + 2$  zu  $(1/f) - v_0$ .

(2) Falls  $q_0 \in \Pi_{n-1}$ , dann existiert in  $[0, \infty)$  eine Alternante der Länge  $n - 2\beta + 1$  zu  $(1/f) - v_0$  und der größte Alternantenpunkt ist ein (+)-Punkt von  $1/f - v_0$ .

Der Beweis ergibt sich durch die gleiche Beweistechnik wie in [3]. Satz 2 impliziert auch die Eindeutigkeit der Minimallösung.

### 3. ZWEI VERGLEICHSLEMMATA

$f$  sei im folgenden eine ganze transzendente Funktion, die die Wachstumsbedingung (1.2) und (2.1)–(2.3) erfüllt. Wir betrachten

$$\begin{aligned} f_r(x) &:= f(x) && \text{für } x \leq r, \\ f_r(x) &:= f(r) && \text{für } x \geq r. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Für  $r > x_L$  und  $n \geq 3\beta$  ergibt sich bei der Approximation von  $1/f$  über  $[0, \infty]$ :

$$|\rho_n(f) - \rho_n(f_r)| \leq \sup_{x \geq r} \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f_r(x)} \right|. \quad (3.2)$$

Vereinbaren wir für  $r > x_L$

$$m(r) = \max_{x \geq r} \frac{1}{f(x)}, \quad (3.3)$$

so ergibt sich aus (3.2)

$$\rho_n(f) \leq \rho_n(f_r) + m(r). \quad (3.4)$$

Wegen (2.4) ist

$$f - p = w^2 \cdot F \quad (3.5)$$

mit einer ganzen Funktion  $F$ . Analog zu  $p$  definieren wir das Polynom  $\tilde{p} \in \Pi_{3\beta-1}$  durch die Interpolationsbedingungen

$$\tilde{p}^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i)$$

für  $j = 0, 1, \dots, 3\beta_i - 1$  und  $i = 1, \dots, L$ . Also ist

$$f - \tilde{p} = w^3 \cdot \tilde{F} \quad (3.6)$$

mit einer ganzen Funktion  $\tilde{F}$ . Wir bezeichnen mit

$$\rho_n(f, r) := \inf_{q_n \in \Pi_n} \left\| \frac{1}{f} - \frac{1}{q_n} \right\|_r$$

die Minimalabweichung von  $1/f$  bezüglich  $V_n$  über  $[0, r]$ , und zu  $g \in C[0, r]$  mit  $E_n(g, r)$  die Minimalabweichung zu  $g$  bezüglich  $\Pi_n$  über  $[0, r]$ .

LEMMA 1. Ist  $w^2(x) = O(f(x))$  für  $x \rightarrow \infty$ , dann existiert eine Konstante  $K_1 > 0$  mit

$$\rho_n(f, r) \leq K_1 \cdot E_{n-3\beta}(\tilde{F}, r)$$

für alle  $n \geq 3\beta$  und alle  $r \geq 0$ .

Beweis. Für  $n \geq 3\beta$  und  $r \geq 0$  sei  $p_n$  die Minimallösung zu  $\tilde{F}$  bezüglich  $\Pi_{n-3\beta}$  über  $[0, r]$ :

$$\|\tilde{F} - p_n\|_r = E_{n-3\beta}(\tilde{F}, r).$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} q_n &:= \tilde{p} + w^3(p_n + E_{n-3\beta}(\tilde{F}, r)) \\ &= w(Q_n + w^2 E_{n-3\beta}(\tilde{F}, r)) = w \cdot \hat{q}_n \end{aligned}$$

mit Polynomen  $Q_n$  und  $\hat{q}_n$ . Da  $f(x) = w \cdot \hat{f}(x)$  ist mit  $\hat{f}(x) > 0$  für  $x \in [0, \infty)$ , folgern wir:

$$\begin{aligned} |\hat{f}(x) - Q_n(x)| &= |(1/w(x))(f(x) - \tilde{p}(x) - w^3(x)p_n(x))| \\ &= w^2(x) |\tilde{F}(x) - p_n(x)| \\ &\leq w^2(x) E_{n-3\beta}(\tilde{F}, r) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \hat{q}_n(x) &= |Q_n(x) + w^2(x) E_{n-3\beta}(\tilde{F}, r)| \\ &\geq \hat{f}(x) + w^2(x) E_{n-3\beta}(\tilde{F}, r) - |f(x) - Q_n(x)| \\ &\geq \hat{f}(x) \end{aligned}$$

für alle  $0 \leq x \leq r$ .

Damit erhalten wir für  $0 \leq x \leq r$ :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{q_n(x)} \right| &= \frac{|f(x) - q_n(x)|}{w^2(x) \hat{f}(x) \hat{q}_n(x)} \\ &\leq \frac{w(x) |\tilde{F}(x) - p_n(x) - E_{n-3\beta}(\tilde{F}, r)|}{|\hat{f}(x)|^2} \\ &\leq K(r) \cdot E_{n-3\beta}(\tilde{F}, r) \end{aligned}$$

mit  $K(r) = 2 \|w^3/f^2\|_r$ .

Wegen  $w^2(x) = O(f(x))$  existiert eine Konstante  $K_1 > 0$  mit  $K(r) \leq K_1$  für alle  $r \geq 0$ , und die Behauptung ist bewiesen.

LEMMA 2. Es sei  $w^2(x) = O(f(x))$  für  $x \rightarrow \infty$ ,  $s > 1$  und  $r$  so gewählt, daß  $f(r) = s^n$ . Dann existiert eine Konstante  $A > 0$ , eine natürliche Zahl  $n_0$  und reelle Zahlen  $\alpha = \alpha(r) \geq r$ , so daß

$$\rho_n(f) \leq m(r) + \max(m(r/(s+2)), A \cdot E(r))$$

für alle  $n \geq n_0$  erfüllt ist. Dabei ist

$$E(r) = \max \left( \left( \frac{s}{s+1} \right)^n, \alpha \cdot E_{n-2\beta-1} \left( \frac{F}{x-\alpha}, \frac{r}{s+2} \right), E_{n-3\beta-1}(\tilde{F}, r) \right).$$

*Beweis.* Es sei  $n_0$  so gewählt, daß  $n_0 \geq 3\beta + 1$  und  $\|f\|_{(s+2)(z_L+1)} < s^{n_0}$  ist. Wegen (3.4) genügt es,  $\rho_n(f_r) \leq \max(m(r/(s+2)), A \cdot E(r))$  zu zeigen. Ist  $\rho_n(f_r) \leq 1/f(r)$ , so ist natürlich  $\rho_n(f_r) \leq m(r/(s+2))$ . Im Falle  $\rho_n(f_r) > 1/f(r)$  unterscheiden wir für die Minimallösung  $1/p_n$  zu  $1/f_r$  bezüglich  $V_n$  die Fälle

$$(1) \quad p_n \in \Pi_{n-1}$$

und

$$(2) \quad p_n \in \Pi_n \setminus \Pi_{n-1}.$$

Im Fall (1) existiert nach Satz 4 eine Alternante der Länge  $n - 2\beta + 1$  und der größte Alternantenpunkt  $z$  ist ein (+)-Punkt von  $1/f_r - 1/p_n$ . Somit ist  $z < r$  und

$$\rho_n(f_r) = \rho_{n-1}(f, r),$$

somit nach dem vorigen Lemma

$$\rho_n(f_r) \leq K_1 \cdot E_{n-3\beta-1}(\tilde{F}, r).$$

Im Fall (2) existiert eine Alternante

$$0 \leq y_1 < y_2 < \dots < y_{m+2}$$

der Fehlerfunktion  $1/f_r - 1/p_n$  mit  $m = n - 2\beta$ . Falls  $y_{m+2} \leq r$  ist, folgern wir wie eben:

$$\rho_n(f_r) \leq K_1 \cdot E_{n-3\beta}(\tilde{F}, r) \leq K_1 \cdot E_{n-3\beta-1}(\tilde{F}, r).$$

Ist aber  $y_{m+2} > r$ , so ist  $y_{m+1}$  ein (+)-Punkt der Fehlerfunktion und  $y_{m+1} < r$ .  
Gilt  $y_{m+1} \geq r/(s+2)$ , so ist wegen  $r/(s+2) \geq x_L + 1$  auch

$$\rho_n(f_r) \leq m(r/(s+2)).$$

Zu untersuchen bleibt noch  $y_{m+1} < r/(s+2)$ :

Mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned} p_n &= p + w^2 \cdot q_n = w \cdot \hat{p}_n, \\ f_r &= w \cdot \hat{f}_r, \\ f_r - p &= w^2 \cdot F_r \end{aligned}$$

gilt

$$\frac{1}{f_r} - \frac{1}{p_n} = \frac{F_r - q_n}{\hat{f}_r \cdot \hat{p}_n}.$$

Da  $\hat{p}_n(x) > 0$  und  $\hat{f}_r(x) > 0$  ist für alle  $x \in [0, \infty)$ , bildet das Funktionensystem

$$V = \left\{ \frac{q}{\hat{f}_r \cdot \hat{p}_n} \mid q \in \Pi_m \right\}$$

über  $[0, \infty)$  ein Haarsches System der Dimension  $m+1$ . Somit ist die Aufgabe,  $1/f_r$  bezüglich  $V_n$  über  $[0, \infty]$  zu approximieren, äquivalent zur Aufgabenstellung, die Funktion  $F_r/(\hat{f}_r \cdot \hat{p}_n)$  über der Punktmenge

$$\{y_1, y_2, \dots, y_{m+2}\}$$

bezüglich  $V$  zu approximieren. Die Minimalabweichung der letzten Aufgabe und somit  $\rho_n(f_r)$  ergibt sich durch

$$\rho_n(f_r) = \left| \sum_{i=1}^{m+2} \tilde{\lambda}_i \frac{F_r(y_i)}{\hat{f}_r(y_i) \cdot \hat{p}_n(y_i)} \right| / \sum_{i=1}^{m+2} |\tilde{\lambda}_i|.$$

Dabei sind die Zahlen  $\tilde{\lambda}$  bis auf einen Faktor eindeutig bestimmte nicht-triviale Lösungen des Gleichungssystems:

$$\sum_{i=1}^{m+2} \tilde{\lambda}_i \frac{q(y_i)}{\hat{f}_r(y_i) \hat{p}_n(y_i)} = 0 \quad \text{für alle } q \in \Pi_m.$$

Wir setzen

$$\lambda_i := \frac{\tilde{\lambda}_i}{\hat{f}_r(y_i) \cdot \hat{p}_n(y_i)} \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, m+2,$$

und Wählen für die Zahlen  $\lambda_i$  die Darstellung

$$\lambda_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m+2} (y_i - y_j)^{-1}.$$

Somit gilt

$$\rho_n(f_r) = \left| \sum_{i=2}^{m+2} \lambda_i F_r(y_i) \right| \left/ \sum_{i=1}^{m+2} |\lambda_i f_r(y_i) \hat{p}_n(y_i)| \right|. \quad (3.7)$$

Fixieren wir ein  $v \in \tilde{V}_{3\beta}$ , dann ist

$$\begin{aligned} \rho_n(f_r) &\leq \left\| \frac{1}{f_r} - v \right\| \\ &\leq \left\| \frac{1}{f_{(x_L+1)}} - v \right\| + \left\| \frac{1}{f_{(x_L+1)}} - \frac{1}{f_r} \right\| \\ &\leq \left\| \frac{1}{f_{(x_L+1)}} - v \right\| + m(x_L + 1). \end{aligned}$$

Es existiert also eine Konstante  $K_0$ , so daß in  $[0, x_L + 1]$  für alle  $n \geq n_0$  gilt:

$$\left| \frac{1}{f_r(x)} - \frac{1}{p_n(x)} \right| = \left| \frac{f(x) - \hat{p}_n(x)}{f(x) \cdot \hat{p}_n(x)} \right| \leq K_0$$

oder

$$\hat{p}_n(x) \geq \frac{f(x)}{1 + K_0 \cdot |f(x)|}.$$

Andererseits gilt für  $x \in [x_L + 1, r]$

$$\frac{1}{p_n(x)} \leq \frac{1}{f(x)} + K_0.$$

Somit folgt wegen  $w^2(x) = O(f(x))$ : Es gibt eine Konstante  $K_2 > 0$ , so daß

$$\hat{f}_r(x) \cdot \hat{p}_n(x) = \frac{f(x) \cdot p_n(x)}{w^2(x)} \geq \frac{2}{K_2}$$

für alle  $n \geq n_0$  und alle  $x \in [0, r]$ . Daher erhalten wir aus (3.7):

$$\rho_n(f_r) \leq \frac{K_2}{2} \cdot \left| \sum_{i=2}^{m+2} \lambda_i F_r(y_i) \right| \left/ \sum_{i=1}^{m+1} |\lambda_i| \right|. \quad (3.8)$$



Wir unterscheiden die beiden Fälle:

$$(a) \quad \left| \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i F_r(y_i) \right| \leq |\lambda_{m+2} F_r(y_{m+2})|$$

Nun gilt für  $j = 1, \dots, m+1$ :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\lambda_{m+2}}{\lambda_j} \right| &= \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m+1} \left| \frac{y_j - y_i}{y_{m+2} - y_i} \right| \\ &\leq \frac{(r/(s+2))^m}{(r - r/(s+2))^m} = \frac{1}{(s+1)^m}. \end{aligned}$$

Somit folgt aus (3.8):

$$\begin{aligned} \rho_n(f_r) &\leq K_2 \cdot |\lambda_{m+2} F_r(y_{m+2})| \left/ \sum_{i=1}^{m+1} |\lambda_i| \right. \\ &\leq \frac{K_2}{(s+1)^m} |F_r(y_{m+2})|. \end{aligned}$$

Jetzt ist  $F_r = (f_r - p)/w^2$  und daher für alle genügend großen  $n$

$$|F_r(y_{m+2})| \leq f_r(y_{m+2}) = s^n.$$

Also erhalten wir für alle  $n \geq n_0$

$$\rho_n(f_r) \leq K_3(s/(s+1))^n$$

mit einer Konstanten  $K_3$ , die unabhängig von  $n$  ist.

$$(b) \quad \left| \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i F_r(y_i) \right| > |\lambda_{m+2} F_r(y_{m+2})|$$

Dann ist für alle  $n \geq n_0$

$$\rho_n(f_r) \leq K_2 \cdot E \quad \text{mit} \quad E := \left| \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i F(y_i) \right| \left/ \sum_{i=1}^{m+1} |\lambda_i| \right|. \quad (3.9)$$

Wir können  $E$  interpretieren als Minimalabweichung der Funktion  $F$  bezüglich des Polynomsystems

$$V^* := \{v^*(x) = (x - y_{m+2})q(x) \mid q \in \Pi_{m-1}\}$$

über der Punktmenge  $Q = \{y_1, \dots, y_{m+1}\}$ . Da  $Q \subset [0, r/(s+2)]$ , folgt

$$E \leq y_{m+2} \cdot E_{m-1} \left( \frac{F}{x - y_{m+2}}, \frac{r}{s+2} \right)$$

und somit aus (3.9) unsere Behauptung mit

$$A = \max(K_1, K_2, K_3), \alpha = y_{m+2}.$$

#### 4. EIN HINREICHENDES KRITERIUM FÜR GEOMETRISCHE KONVERGENZ

Unter Ausnützen des zweiten Lemmas sind wir in der Lage ein hinreichendes Kriterium für geometrische Konvergenz zu beweisen.

**SATZ 5.** *f sei eine ganze transzendente Funktion mit den Eigenschaften*

- (i)  $f(z) \in \mathbb{R}$  für alle  $z \in \mathbb{R}$ ,
- (ii)  $f$  besitzt in  $[0, \infty)$  endlich viele Nullstellen,
- (iii)  $f$  erfüllt die Wachstumsbedingung (1.2),
- (iv) es existieren reelle Zahlen  $s > 1, \gamma > 0$  und  $\tilde{r} > 0$  mit

$$m \left( \frac{r}{s+2} \right) \leq \|f\|_r^{-\gamma} \quad \text{für alle } r \geq \tilde{r}.$$

Dann besitzt  $f$  geometrische Konvergenz.

*Beweis.* Wir verwenden wieder die Bezeichnungen der vorigen Abschnitte. Zunächst müssen wir, um die Lemmata anwenden zu können, zeigen, daß  $w^2(x) = O(f(x))$  für  $x \rightarrow \infty$ :

Wegen (iii) und (iv) gilt für  $x \geq \max(r_0, \tilde{r})$ :

$$\begin{aligned} \left| \frac{w^2(x)}{f(x)} \right| &\leq \|w^2\|_x \cdot m(x) \leq \|w^2\|_x \cdot \|f\|_x^{-\gamma} \\ &\leq \|w^2\|_x \left[ \frac{K}{M_f(x, s)} \right]^{\gamma/\theta}. \end{aligned}$$

Da  $f$  eine ganze transzendente Funktion ist, folgt daraus

$$w^2(x) = o(f(x)) \quad \text{für } x \rightarrow \infty.$$

Wir dürfen in (iv),  $s \leq 2$  annehmen, und es sei  $\theta = \theta(s)$  wie in (1.2). Wir wenden jetzt das Lemma 2 an, indem wir dort die Zahl  $s$  durch  $\tilde{s} = s^{1/(1+\theta)}$  ersetzen und  $r = r(n)$  so wählen, daß

$$f(r) = \|f\|_r = \tilde{s}^n.$$

Zur Abkürzung setzen wir  $r^* := r/(\bar{s} + 2)$  und  $G(x) := F(x)/(x - \alpha)$  mit  $\alpha = \alpha(n) \geq r$  wie in Lemma 2. Betrachten wir die Ellipse  $\mathfrak{E}(r^*, s)$ , so gilt für den rechten Scheitel  $\xi = r^*(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(s + 1/s))$ :

$$\xi < r/2. \quad (4.1)$$

Nach einem Satz von Bernstein [1] ergibt sich

$$E_{n-2\beta-1}(G, r^*) \leq \frac{2M_G(r^*, s)}{(s-1)s^{n-2\beta-1}}$$

und

$$E_{n-3\beta-1}(\tilde{F}, r) \leq \frac{2M_{\tilde{F}}(r, s)}{(s-1)s^{n-3\beta-1}}.$$

Wegen (4.1) und  $\alpha \geq r$  folgt

$$M_G(r^*, s) \leq \frac{M_{\tilde{F}}(r^*, s)}{\alpha - r/2} \leq \frac{M_{\tilde{F}}(r, s)}{\alpha - r/2}$$

und daraus

$$\alpha \cdot M_G(r^*, s) \leq 2M_{\tilde{F}}(r, s).$$

Wegen  $F = (f - p)/w^3$  und  $\tilde{F} = (f - \tilde{p})/w^3$  existiert eine Zahl  $n_1 \in \mathbb{N}$  mit

$$M_{\tilde{F}}(r, s) \leq 2M_f(r, s)$$

und

$$M_{\tilde{p}}(r, s) \leq 2M_f(r, s)$$

für alle  $n \geq n_1$ . Somit gibt es wegen der Wachstumsbedingung eine Konstante  $C > 0$  und eine natürliche Zahl  $n_2 \geq \max(n_0, n_1)$  mit

$$\alpha \cdot E_{n-2\beta-1}(G, r^*) \leq C \frac{\|f\|_r^\theta}{s^n} = C \cdot s^{-n/(1+\theta)}$$

und

$$E_{n-3\beta-1}(\tilde{F}, r) \leq C \cdot s^{-n/(1+\theta)}.$$

Aus Lemma 2 erhalten wir schließlich für  $n \geq n_2$ :

$$\rho_n(f) \leq 2m \left( \frac{r}{\bar{s} + 2} \right) + A \cdot \max \left( C s^{-n/(1+\theta)}, \left( \frac{\bar{s}}{\bar{s} + 1} \right)^n \right).$$

Wegen  $\bar{s} < s$ , folgt aus (iv) für alle genügend großen  $n$ :

$$m\left(\frac{r}{\bar{s} + 2}\right) \leq m\left(\frac{r}{s + 2}\right) \leq s^{-(n \cdot \gamma)/(1+\theta)}.$$

Setzt man  $q = \min(\bar{s} + 1)/\bar{s}, s^{1/(1+\theta)}$ , so ergibt sich:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \rho_n(f)^{1/n} \leq \frac{1}{q} \quad \text{mit } q > 1.$$

*Folgerung.*  $f$  sei eine ganze transzendente Funktion mit den Eigenschaften (i)–(iii) von Satz 5. Existiert ein  $r_1 \geq 0$  mit  $f'(x) \geq 0$  für alle  $x \geq r_1$ , dann besitzt  $f$  geometrische Konvergenz.

*Beweis.* Um Satz 5 anzuwenden, müssen wir (iv) nachweisen: Wir setzen dazu  $s^* := 10s$  für ein festes  $s > 1$ . Wegen der Wachstumbedingung gibt es  $\theta(s^*) > 0$ ,  $r(s^*) > 0$  und  $K(s^*) > 0$  mit

$$M_f(r, s^*) \leq K(s^*) (\|f\|_r)^{\theta(s^*)} \quad (4.2)$$

für alle  $r \geq r(s^*)$ . Definieren wir  $r^* := r/(s + 2)$ , so gilt für den rechten Scheitel  $\xi = r^*(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(s^* + 1/s^*))$  der Ellipse  $\mathfrak{E}(r^*, s^*)$ :

$$\xi \geq \frac{r}{s + 2} \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2}s\right) \geq r.$$

Daher gilt wegen (4.2) für  $r^* \geq r(s^*)$

$$\|f\|_{r^*} \geq \left[\frac{M_f(r^*, s^*)}{K(s^*)}\right]^{1/\theta(s^*)} \geq \left[\frac{\|f\|_r}{K(s^*)}\right]^{1/\theta(s^*)}. \quad (4.3)$$

Wählen wir  $r_2$  so, daß  $\|f\|_r = f(r)$  für alle  $r \geq r_2$ , dann gilt für  $r \geq r_2(s + 2)$ :

$$m\left(\frac{r}{s + 2}\right) = m(r^*) = \frac{1}{f(r^*)} = \frac{1}{\|f\|_{r^*}}.$$

Wählt man schließlich  $\gamma := 1/(2\theta(s^*))$ , so gibt es wegen (4.3) ein  $\tilde{r} \geq 0$  mit

$$m\left(\frac{r}{s + 2}\right) \leq \|f\|_r^{-\gamma}$$

für alle  $r \geq \tilde{r}$ .

Zu einem hinreichenden Kriterium für geometrische Konvergenz benötigen wir also außer den in Satz 1 genannten notwendigen Bedingungen zusätzlich die Voraussetzung (iv), worin sich eine Oszillationsbeschränkung für die Funktion  $f$  auf  $[0, \infty)$  ausdrückt. Andererseits zeigten Henry und Roulier

[7], daß bei geometrischer Konvergenz zu starke Oszillationen ausgeschlossen sind. Beides deutet darauf hin, daß der Schlüssel für die vollständige Charakterisierung von Funktionen mit geometrischer Konvergenz in Oszillationseigenschaften zu finden ist.

## LITERATUR

1. S. BERNSTEIN, "Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle," Chelsea, New York, 1970.
2. H.-P. BLATT, Rationale Tschebyscheff-Approximation über unbeschränkten Intervallen, Habilitationsschrift, Universität Erlangen-Nürnberg, 1974.
3. H.-P. BLATT, Rationale Tschebyscheff-Approximation über unbeschränkten Intervallen, *Numer. Math.* **27** (1977), 179–190.
4. H.-P. BLATT, Ein Störungssatz zur rationalen Tschebyscheff-Approximation über  $[0, \infty]$ , *J. Approximation Theory* **21** (1977), 246–256.
5. H.-P. BLATT, Rationale Approximierbarkeit singulärer Funktionen über  $[0, \infty]$ , in "Approximation Theory, Bonn 1976," Lecture Notes in Mathematics, Vol. 556, Springer, 1–15.
6. W. J. CODY, G. MEINARDUS, UND R. S. VARGA, Chebyshev rational approximations to  $e^{-x}$  in  $[0, \infty)$  and applications to heat-conduction problems, *J. Approximation Theory* **2** (1969), 50–65.
7. M. S. HENRY UND J. A. ROULIER, Geometric Convergence of Chebyshev Rational Approximations on  $[0, \infty)$ , *J. Approximation Theory* **21** (1977), 361–374.
8. G. MEINARDUS, A Converse Theorem in Rational Approximation, "Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory," Varna, Bulgaria, 1970, 217–220.
9. G. MEINARDUS UND R. S. VARGA, Chebyshev rational approximations to certain entire functions in  $[0, \infty)$ , *J. Approximation Theory* **3** (1970), 300–309.
10. G. MEINARDUS, A. R. REDDY, G. D. TAYLOR, UND R. S. VARGA, Converse theorems and extensions in Chebyshev rational approximation to certain entire functions in  $[0, \infty)$ , *Trans. Amer. Math. Soc.* **170** (1972), 171–185.
11. J. A. ROULIER UND G. D. TAYLOR, Rational Chebyshev approximation on  $[0, \infty)$ , *J. Approximation Theory* **11** (1974), 208–215.